Master 1 MAS & CHPS – Probabilités, Modèles et Applications
Responsable : Adrien Hardy, email : `adrien.hardy@univ-lille.fr`

Feuille d'exercices 9
Chaines de Markov
Correction Exercice 13

Exercice 13 (Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$). On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ définie par $X_0 := 0$ et $X_n = X_{n-1} + \xi_n$ pour $n \geq 1$, où $(\xi_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d sur $\mathbb{Z}^d$ telles que $\mathbb{P}(\xi_n = \pm e_j) = 1/2d$ avec $e_1, \ldots, e_d$ la base canonique.

(a) Montrer que si X est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{Z}^d$ alors

$$\mathbb{P}(X = 0) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \varphi_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que la fonction caractéristique de ξ_n est donnée par

$$\varphi(t) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos(t_j)$$

et en déduire une expression pour $(P^n)_{00}$ pour tout $n \geq 1$.

(c) Montrer que pour tout $0 < z < 1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n (P^n)_{00} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - z\varphi(t)}\,\mathrm{d}t =: I(z).$$

(d) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente $\Leftrightarrow \lim_{z\to 1} I(z) = \infty$.

(e) On pose $F(z,t) := \frac{1}{1-z\varphi(t)}$. Montrer que :

- pour tout $c > 0$, $(z,t) \mapsto F(z,t)$ est bornée sur $]0,1] \times \{t \in \mathbb{Z}^d : \|t\| \geq c\}$.
- donner le comportement asymptotique de $F(1,t)$ quand $t \to 0$.
- si $\|t\|$ est assez petit, l'application $z \mapsto F(z,t)$ est croissante.

(f) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente si $d = 1$ ou 2 mais transitoire pour $d \geq 3$.

Correction:

(a) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$, on a :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,X\rangle}] = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(X = n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,n\rangle}, \qquad t \in \mathbb{R}^d.$$

Pour tout $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, on calcule

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} \mathrm{e}^{i\langle t,n\rangle} \mathrm{d}t = \int_{[-\pi,\pi]^d} \prod_{j=1}^{d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_j n_j} \mathrm{d}t_j = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tn_j} \mathrm{d}t = \prod_{j=1}^{d} 2\pi \mathbf{1}_{n_j=0} = (2\pi)^d \mathbf{1}_{n=0}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \varphi_X(t) \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(X=n) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,n\rangle} \mathrm{d}t = \mathbb{P}(X=0)$$

grace au théorème de Fubini ; en effet $(n,t) \mapsto \mathbb{P}(X=n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tn}$ est L^1 par rapport à la mesure $(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \delta_n) \otimes \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]^d} \mathrm{d}t$.

(b) On calcule

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,\xi_n\rangle}] = \frac{1}{2d} \sum_{j=1}^{d} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,e_j\rangle} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,e_j\rangle} \right) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \cos(t_j)$$

puis, en utilisant (a) et l'indépendance des ξ_n,

$$(P^n)_{00} = \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \varphi_{X_n}(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^n(t)\, \mathrm{d}t.$$

(c) Puisque pour tout $0 < z < 1$ l'application $(n,t) \mapsto z^n \varphi(t)^n$ est L^1 par rapport à la mesure $(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \delta_n) \otimes \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]^d} \mathrm{d}t$, le théorème de Fubini et (b) nous donnent pour tout $0 < z < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n (P^n)_{00} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi^n(t) \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - z\varphi(t)} \mathrm{d}t.$$

(d) Remarquons d'abord que la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est clairement irréductible et donc que (X_n) est récurrente $\Leftrightarrow$ 0 est récurrent. Le théorème de convergence monotone donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{00} = \lim_{z\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n (P^n)_{00} = \lim_{z\to 1} I(z)$$

et on conclut par l'équivalence : 0 récurrent $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{00} = \infty$.

(e)
- D'un côté, comme $\cos(x) \geq -1$, on a $F(z,t) \geq 1/(1+z) \geq 1$; en particulier F est positive. Comme φ est continue et que, pour $t \in [-\pi,\pi]^d$, on $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$, on voit que F est bornée supérieurement dès que l'on restreint t a un sous ensemble de la forme $\{t \in \mathbb{R}^d : \|t\| \geq c\}$ avec $c > 0$.
- Pour tout $t \neq 0$, on a

$$\varphi(t) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \cos(t_j) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} (1 - \frac{t_j^2}{2} + o(t_j^2)) = 1 - \frac{1}{2d} \|t\|^2 + o(\|t\|^2), \qquad t \to 0,$$

et donc on a l'équivalence

$$F(1,t) \sim \frac{2d}{\|t\|^2}, \qquad t \to 0.$$

– Comme $\varphi(t) > 0$ dès que $\|t\|$ est suffisamment petit on voit que $z \mapsto 1/(1 - z\varphi(t))$ est croissante pour tout t suffisamment petit.

(f) On fixe $c > 0$ assez petit tel que $z \mapsto F(z,t)$ est croissante et

$$\frac{d}{\|t\|^2} \leq F(1,t) \leq \frac{4d}{\|t\|^2} \qquad (\star)$$

pour tout t tel que $\|t\| \leq c$. En utilisant (e), on voit que

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} \mathbf{1}_{\|t\|>c} F(z,t)\mathrm{d}t$$

reste borné pour tout $z \in]0,1]$ et donc

$$\lim_{z\to 1} I(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to 1} \int_{[-\pi,\pi]^d} \mathbf{1}_{\|t\|\leq c} F(z,t)\mathrm{d}t = \infty.$$

Par convergence monotone, on a

$$\lim_{z\to 1} \int_{[-\pi,\pi]^d} \mathbf{1}_{\|t\|\leq c} F(z,t)\mathrm{d}t = \int_{[-\pi,\pi]^d} \mathbf{1}_{\|t\|\leq c} F(1,t)\mathrm{d}t.$$

L'encadrement $(\star)$ nous donne aussi que

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} \mathbf{1}_{\|t\|\leq c} F(1,t)\mathrm{d}t = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{[-\pi,\pi]^d} \mathbf{1}_{\|t\|\leq c} \frac{1}{\|t\|^2}\mathrm{d}t.$$

Finalement, en passant en coordonnées polaires $t \in \mathbb{R}^d \mapsto (r,\sigma)$ avec $r = \|t\|$ et $\sigma = t/\|t\|$ (de Jacobien $\mathrm{d}t = r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma$ où $\mathrm{d}\sigma$ est la mesure uniforme sur la sphere de $\mathbb{R}^d$) on voit que

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\pi,\pi]^d} \mathbf{1}_{\|t\|\leq c} \frac{1}{\|t\|^2}\mathrm{d}t = \infty \\
&\Leftrightarrow \int_0^c r^{d-3}\mathrm{dr} = \infty \\
&\Leftrightarrow d \leq 2.
\end{aligned}$$