Series temporelles - TP1

M1 Mathématiques et finance 2017–2018

Responsable : Adrien Hardy, email : adrien.hardy@math.univ-lille1.fr

Instructions : *3 heures. Déposer un compte-rendu sur Moodle en fin de séance.*

Consignes préliminaires : Créer un répertoire de travail où vous sauvegarderez vos comptes-rendus et données. Dans R Studio, créer un nouveau "R Markdown" pour chaque TP : Vous pouvez utiliser ce document comme un éditeur où l'on peut compiler chaque ligne via la commande "run". De plus, le code entre deux balises d'un "Chunk" sera compilé et publié en un compte-rendu HTML (ou PDF en remplaçant `html_document` par `pdf_document`) ; ce qui est à l'extérieur de ces balises sera considéré comme du texte.

Exercice 1 (Simulations de séries temporelles).

(a) Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien centré réduit. Simuler les séries temporelles $(X_t)_{t=1\ldots500}$ suivantes, représenter-les graphiquement (chronogramme) et superposer à ces graphiques le graphe de la partie déterministe.

1. $X_t = \varepsilon_t$
2. $X_t = 2\sin(\pi t/10) + \varepsilon_t$
3. $X_t = \sqrt{t/10} - 4 + 2\sin(\pi t/10) + \varepsilon_t$
4. $X_t = \frac{t}{200}\sin(\pi t/10)\ \varepsilon_t$

(b) Identifier la tendance, la saisonnalité et le bruit/résidu dans chacune des séries précédentes. Comment distinguer à l'oeil nu un modèle additif d'un multiplicatif ?

(c) On définit un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par l'équation $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + \varepsilon_t$. C'est un premier exemple de processus autorégressif. Prouver que ce processus est bien défini en montrant que $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, puis montrer qu'il est stationnaire et calculer sa fonction d'autocorrélation. Ensuite, on définit $(\tilde{X}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ par $\tilde{X}_0 := 0$ et l'équation $\tilde{X}_t = \frac{1}{2}\tilde{X}_{t-1} + \varepsilon_t$. Montrer que, presque sûrement,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\geqslant k} |X_t - \tilde{X}_t| = 0.$$

En déduire une façon approchée de simuler $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et l'implémenter. Dessiner la fonction d'autocorrélation empirique de cette série temporelle.

Exercice 2 (CAC40). On s'intéresse au jeu de données `EuStockMarkets` disponible sous R. La description de ces données est accessible en tapant `help(EuStockMarkets)` et la structure est présentée dans `str(EuStockMarkets)`.

(a) Extraire la série temporelle du CAC40 depuis EuStockMarkets et donner une représentation graphique. Quel modèle de décomposition (additif ou multiplicatif) proposez-vous pour cette série ? Décomposer cette série avec R et représenter graphiquement chacune des composantes.

(b) Extraire la tendance m_t et superposer son graphe à celui de la série temporelle.

(c) Examiner la saisonnalité s_t et déterminer sa période T. Vérifier votre réponse en sommant s_t sur cette période, puis à l'aide de l'opérateur Δ.

(d) Extraire la série des bruits résiduels et étudier cette série (moyenne, variance, histogramme, etc).

(e) Dessiner la fonction d'autocorrélation du bruit résiduel (*Attention aux valeurs* `NA`). Est-ce que les résidus semblent indépendants ? Faire un test statistique pour confirmer/infirmer votre hypothèse.