Series temporelles - TP2

M1 Mathématiques et finance 2017–2018

Responsable : Adrien Hardy, email : adrien.hardy@math.univ-lille1.fr

Instructions : *3 heures. M'envoyer un compte-rendu "html" fait avec R Markdown en fin de séance par email.*

Exercice 1 (modèles ARIMA). On dit qu'une série temporelle X_t est un processus ARIMA(p, d, q) si elle satisfait l'équation

$$(1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^p)(1 - B)^d X_t = (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q)\varepsilon_t$$

où B est l'opérateur de retard et ε_t un bruit blanc. Si une telle série existe, elle n'est en général pas stationnaire. La commande `arima.sim` permet de simuler de telles séries sous R.

(a) Pour quels choix de paramètres retrouve-t-on le modèle ARMA ? AR ? MA ?

(b) Que représente la série $(1 - B)^d X_t$? En déduire une interprétation simple d' ARIMA en termes d'ARMA.

(c) Simuler et tracer un processus AR(1) de paramètre $\varphi_1 = 0.3$, puis $\varphi_1 = 0.8$, puis $\varphi_1 = -0.8$. Commenter. Donner leurs fonctions d'autocorrélations empiriques.

(d) Calculer la fonction d'autocorrélation théorique d'un processus MA(q).

(e) Simuler et tracer 100 observations d'un processus MA(3) de paramètres $\theta_1 = 0.9$, $\theta_2 = 0.6$, $\theta_3 = 0.9$ puis tracer sa fonction d'autocorrélation empirique.

(f) Simuler 200 observations du modèle suivant :

$$(1 - 0.8B)X_t = (1 - 0.3B + 0.6B^2)\varepsilon_t, \quad (\varepsilon_t) \sim \mathcal{N}(0, 1.5) \text{ i.i.d.}$$

On essaie de retrouver les coefficients à partir de la série simulée : Ajuster un modèle ARIMA(p, d, q) à l'aide de `arima` à la série simulée. Cette commande contient entre autres les résidus de la modélisation : afficher le graphe de la fonction d'autocorrélation empirique des résidus.

Exercice 2 (GNP US). On s'intéresse au GNP (gross national product) américain, et plus précisément au taux de croissance trimestriel du GNP US entre le deuxième trimestre 1947 et le premier trimestre 1991, disponible sur ma page web.

(a) Importer ce tableau sous R, créer la série temporelle associée (`ts`) et tracer-la.

(b) Faire un test de blancheur (`Box.test`). Que peut-on conclure ?

(c) Calculer et afficher la fonction d'auto-corrélation de la série jusqu'a $h = 12$. Commenter.

(d) Ajuster un modèle AR à la série (`ar`[1]). Donner les paramètres estimés.

(e) Etudier les résidus de cette modélisation : tracer leur graphe, leur fonction d'autocorrélation empirique, et faire un test de blancheur. Les résidus sont-ils gaussiens ? (`shapiro.test`[2]).

[1] Le choix du nombre de paramètres p de cette modélisation est basé sur le critère d'information d'Akaike (AIC), qui pénalise linéairement la méthode du maximum de vraisemblance en p.

[2] Cette commande retourne la p-value du test de Shapiro–Wilk, qui teste l'hypothèse H_0 que l'échantillon testé est un échantillon gaussien.