Université de Lille 1 – U.F.R. de Mathématiques
M1 MAS – Ingénierie Mathématique – Semestre 1, 2016

TISD[1] – DM 1

Travail à faire en binôme. Un rapport et un script R par binôme doivent être déposés sur Moodle avant le mercredi 19 octobre 23h55. Le nom des étudiants doit apparaître en commentaire au début du script. Le rapport (sous Word, OpenOffice, Latex, etc) présentera les réponses aux questions, les résultats graphiques, et vos commentaires ; il n'est pas nécessaire d'y inclure les programmes.

Exercice 1 (Magnitudes de tremblements de terre)

Nous disposons d'une base de données relative à 1000 séismes de magnitude supérieure à 4 sur l'échelle de Richter s'étant produits depuis 1964 dans le voisinage des Îles Fidji. Cette base est disponible dans R sous le nom `quakes` ; vous pouvez consulter sa fiche en tapant `help(quakes)`. Les séismes sont caractérisés par plusieurs variables dont la magnitude `mag`, la latitude `lat` et la longitude `long`.

1. Étudier succinctement la variable `mag` : Donner sa moyenne, son écart-type, son étendue, son intervalle inter-quartile, et dessiner sa boîte à moustache.

2. Donner un graphique des coordonnées géographies des séismes, c'est-à-dire de leur latitude en fonction de leur longitude.

En regardant ce graphique, on voit clairement qu'il y a deux régions d'activité sismique. La première correspond à une jonction de plaques tectoniques, la seconde à la tranchée de Tonga en Nouvelle-Zélande. On se demande si la magnitude du séisme est liée à la région géographique où il se produit.

3. On divise alors la variable `mag` en deux groupes qu'on étudie séparément :

3.1 Créer une variable `groupe` qui vaut 1 si le séisme se produit à une longitude supérieure à 175 et 2 s'il se produit à une longitude inférieure à 175.

3.2 Donner les moyennes et les variances de chaque groupe puis comparer-les.

[1] Responsable : Adrien Hardy. Laboratoire Paul Painlevé, Université des Sciences et Technologies de Lille, Bâtiment M3, Bureau 306. Email: adrien.hardy@math.univ-lille1.fr

3.3 Réétablir la formule de décomposition de la variance vue en cours pour ces deux groupes, puis calculer chaque terme. Que peut-on conclure ?

4. On se propose de modéliser les magnitudes par des lois gamma.

4.1 On rappelle que la loi Gamma $\Gamma(k,\theta)$ de paramètre de forme k et de paramètre d'échelle $\theta > 0$ est la loi continue sur $[0,+\infty)$ de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)}\, x^{k-1} \mathrm{e}^{-x/\theta}. \tag{0.1}$$

Lorsque k est entier, donner une façon rapide de montrer que l'espérance d'une loi Gamma est $k\theta$ et sa variance $k\theta^2$. Ce résultat reste vrai lorsque $k \in \mathbb{R}_+^*$.

4.2 Tracer l'histogramme de la magnitude pour chaque groupe et y superposer la densité de lois Gamma bien choisies. Commenter.

4.3 Pour chaque groupe, tracer le QQ-plot pour voir si graphiquement les données pourraient être issues d'une loi Gamma (empirique ou théorique). Commenter ces graphiques, en particulier les queues de distribution.

5. Résumez l'analyse complète et présentez vos conclusions.

Exercice 2 (Simulation de courbes fractales)

1. On considère les matrices

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.839 & -0.303 \\ 0.383 & 0.924 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.161 & -0.136 \\ 0.138 & -0.182 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0.232 \\ -0.080 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.921 \\ 0.178 \end{bmatrix},$$

et on définit la variable aléatoire (X,Y) par

$$\mathbb{P}\Big((X,Y) = (A_0, B_0)\Big) = 0.9 \;, \qquad \mathbb{P}\Big((X,Y) = (A_1, B_1)\Big) = 0.1 \;.$$

Etant donné un échantillon $(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)$ de cette variable, on considère la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ définie par récurrence :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad P_{n+1} = X_n P_n + Y_n, \quad n \geqslant 1. \tag{P}$$

1.1 Créer une fonction de n qui renvoie un tableau contenant $P_1,\dots,P_n$.

1.2 En identifiant chaque vecteur P_n avec un point P_n du plan de mêmes coordonnées, dessiner sur un même graphique les points $(P_n)_{n=1\dots N}$ pour $N = 1000$.

1.3 Vous semble-t-il que la suite de points P_n remplit la courbe fractale de façon plutôt ordonnée ou chaotique ? Justifiez-vous ; on pourra tester différentes valeurs de n et/ou utiliser des couleurs.

2. On considère maintenant les matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.44 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix},$$

on définit la variable aléatoire (X, Y) par

$$\mathbb{P}\Big((X,Y) = (A_1, B_1)\Big) = 0.1, \qquad \mathbb{P}\Big((X,Y) = (A_2, B_2)\Big) = 0.15$$
$$\mathbb{P}\Big((X,Y) = (A_3, B_3)\Big) = 0.15, \qquad \mathbb{P}\Big((X,Y) = (A_4, B_4)\Big) = 0.6\ ,$$

et on définit la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ comme en (P).

Mêmes questions qu'en **1.1**, **1.2**, **1.3**.